

symmetrische Teil von \mathfrak{R}^N benutzt wird. $\mathfrak{W}_n = [\mathfrak{R}^n]$ sei der Raum für n Teilchen mit $n \ll N$. Die Verkürzung³ von P_{φ} auf \mathfrak{W}_n sei $W_{\varphi n}$. Ein System strebt dann und nur dann einem eindeutigen Gleichgewicht (das allein von der makroskopischen Energie, der inneren Energie, abhängt) zu, wenn $W_{\varphi n}$ für $n < n_0$ eine mit ε_φ nur langsam veränderliche, d. h. praktisch stetige Funktion von ε_φ ist. Hierbei bestimmt n_0 die höchstzulässige Teilchenkorrelation innerhalb der ergodischen Observablen. Der Begriff der Teilchenkorrelation wird gleich weiter unten näher erläutert.

c) Ist $W_{\varphi n}$ nicht wie unter b) eine sich mit ε_φ nur langsam verändernde Funktion, so ist das Gleichgewicht des Systems mehrdeutig in dem Sinne, daß es weitere *makroskopische* Konstanten der Bewegung als die innere Energie gibt. Diese weiteren Konstanten sind bestimmt durch die verschiedenen $W_{\varphi n}$ bei fast gleichen Werten ε_φ .

d) Sind die ε_φ entartet, so muß im allgemeinen der Fall c) vorliegen.

e) Für den Fall des Nichtgleichgewichtes betrachte man die Teilräume $\mathfrak{T}(\varepsilon, \delta\varepsilon)$, die von allen φ_ν mit $\varepsilon < \varepsilon_\nu < \varepsilon + \delta\varepsilon$ aufgespannt werden. $P_{\mathfrak{T}}$ sei der Projektionsoperator auf \mathfrak{T} , V sei ein positiv definiter hermitescher Operator mit $P_{\mathfrak{T}} V P_{\mathfrak{T}} = V$. Für alle solche V bilde man die Verkürzungen auf \mathfrak{W}_n , die mit V_n bezeichnet seien. Obwohl auch die Fälle c) und d) im Nichtgleichgewicht behandelt werden können, sei der Einfachheit wegen der Fall b) vorausgesetzt. Der Ablauf der Nichtgleichgewichtsvorgänge läßt sich dann makroskopisch beschreiben, wenn für $n < n_0$ die V_n bei geeignetem $\delta\varepsilon$ für alle zulässigen V miteinander vertauschbar sind. Die makroskopischen Observablen sind allein durch die V_n eindeutig bestimmt. $\delta\varepsilon$ bestimmt in der Form $\delta t \delta\varepsilon \geq \hbar$ ein Zeitintervall δt , in dem sich makroskopische Observablen wenig ändern. Observable, die sich innerhalb eines solchen δt merklich ändern, können nicht makroskopisch sein.

f) Eine Observable A heiße bis zur Teilchenzahl n korreliert, wenn der Erwartungswert

$$\text{Spur}(WA) \approx \text{Spur}(\tilde{W}A)$$

ist, sobald für W und \tilde{W} die Verkürzungen auf $\mathfrak{W}_{n'}$ (mit $n' \geq n$) übereinstimmen. Ein System soll ergodisch bis zum Grade n heißen, wenn alle bis zur Teilchenzahl n korrelierten Observablen ergodisch sind. Es muß erwartet werden, daß alle normalen makroskopischen Systeme diese Bedingung erfüllen.

g) Alle Betrachtungen lassen sich auf Systeme mit N_1 Teilchen der Sorte 1, N_2 der Sorte 2 usw. übertragen, sobald $N_1 + N_2 + \dots$ sehr groß ist.

Reibungsdrucktensor, Diffusions- und Wärmestrom in stark inhomogenen Gasen

VON HELMUT G. REIK

Institut für Theoretische Physik der Rhein.-Westfäl. Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. **12a**, 663–665 [1957]; eingegangen am 3. Juli 1957)

1. CHAPMAN und COWLING¹ und später KOHLER² haben gezeigt, daß man die zweite Näherung für den Wärmefluß $\mathfrak{J}_Q^{(2)}$ und den Reibungsdrucktensor $P^{(2)}$ in Einkomponentengasen durch geeignete Mittelbildung über diejenige ENSKOGsche Integralgleichung erhält, die die Störfunktion zweiter Näherung bestimmt. Dadurch wird die Lösung dieser Integralgleichung umgangen.

Das Verfahren kann auf Zweikomponentengase übertragen werden und liefert neben $P^{(2)}$ und $\mathfrak{J}_Q^{(2)}$ das modifizierte Diffusionsgesetz. Der Zusammenhang zwischen diesen Ausdrücken und der Entropieproduktion zweiter Näherung macht das Verfahren besonders durchsichtig.

2. Mit der Gleichgewichtsverteilung

$$\ln f_j^{(0)} = \frac{m_j}{2kT} (c_j - c_0)^2 - \ln Z_j$$

erhält man aus der ENSKOGschen Gleichung zur Bestimmung der Störung*

$$f_j^{(1)} = f_j^{(0)} \Phi_j^{(1)}$$

$$\frac{\partial_0 f_j^{(0)}}{\partial t} + c_j \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + \mathfrak{F}_j \cdot \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \mathbf{c}_j} = -n_j^2 I_j(\Phi_j^{(1)}) - n_j n_i I_{ji}(\Phi_j^{(1)} + \Phi_i^{(1)}) \quad \begin{matrix} (j=1, 2) \\ (i=2, 1) \end{matrix}$$

die Beziehungen

$$f_j^{(0)} \left[\frac{m_j}{2kT} (c_j - c_0)^2 - \frac{5}{2} \right] (c_j - c_0) \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} = -n_j^2 I_j(\Phi_j^{(1)}) - n_j n_i I_{ji}(\Phi_j^{(1)} + \Phi_i^{(1)}), \quad (1)$$

¹ S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge 1953. S. 263 ff.

² M. KOHLER, Z. Phys. **127**, 201 [1949].

* Bezeichnungen nach CHAPMAN und COWLING, l. c. ¹, insbesondere bedeutet

$$\mathfrak{d}_{12} = \frac{\partial (n_1/n)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{n_1 n_2 (m_2 - m_1)}{n \varrho} \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho} (\bar{\mathfrak{S}}_1 - \bar{\mathfrak{S}}_2).$$

$\partial c_0 / \partial \mathbf{r}$ ist der Deformationsgeschwindigkeitstensor, e sein symmetrischer, $\overset{\circ}{e}$ sein symmetrischer und spurfreier Anteil. $\{, \}$ sind die CHAPMAN–COWLINGSchen Klammersymbole; vgl. l. c. ¹, S. 85, 86.



$$\frac{n}{n_j} f_j^{(0)} (c_j - c_0) \cdot \mathfrak{d}_{12} = -n_j^2 I_j (\Phi_{jD}^{(1)}) - n_j n_i I_{ji} (\Phi_{jD}^{(1)} + \Phi_{iD}^{(1)}), \quad (2)$$

$$f_j^{(0)} \frac{m_j}{kT} (c_j - c_0)^\circ (c_j - c_0) : \frac{\partial c_0}{\partial r} = -n_j^2 I_j (\Phi_{jR}^{(1)}) - n_j n_i I_{ji} (\Phi_{jR}^{(1)} + \Phi_{iR}^{(1)}), \quad (3)$$

wobei

$$\Phi_j^{(1)} = \Phi_{jQ}^{(1)} + \Phi_{jD}^{(1)} + \Phi_{jR}^{(1)}.$$

Multiplikation von (1), (2), (3) mit $\Phi_j^{(2)}$, Integration über dc_j und Addition entsprechender Ausdrücke für die Komponenten 1 und 2 liefert

$$\mathfrak{J}_{Q\text{red}}^{(2)} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial r} = -k \{ \Phi^{(2)}, \Phi_Q^{(1)} \}; \quad \mathfrak{J}_D^{(2)} \cdot k \mathfrak{d}_{12} = -k \{ \Phi^{(2)}, \Phi_D^{(1)} \}; \quad \frac{P^{(2)}}{T} : \frac{\partial c_0}{\partial r} = -k \{ \Phi^{(2)}, \Phi_R^{(1)} \}. \quad (4)$$

3. $f_j^{(2)} = f_j^{(0)} \Phi_j^{(2)}$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial_1 f_j^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial_0 f_j^{(1)}}{\partial t} + c_j \cdot \frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial r} + \mathfrak{F}_j \cdot \frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial c_j} = -n_j^2 I_j (\Phi_j^{(2)}) - n_j n_i I_{ji} (\Phi_j^{(2)} + \Phi_j^{(1)}) - J_j (f_j^{(1)} f_i^{(1)}) - J_{ji} (f_j^{(1)} f_i^{(1)}). \quad (5)$$

Multipliziert man (5) mit $k \Phi_{jQ}^{(1)}$, integriert über dc_j und addiert die Gleichungen für die Komponenten 1 und 2, so liefert der Vergleich der erhaltenen Ausdrücke mit (4)

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{Q\text{red}}^{(2)} \cdot \frac{\partial \ln T}{\partial r} = & -2\varrho \frac{D_0 s_Q^{(1)}}{Dt} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathfrak{S}_Q^{(1)} - \sum_{j=1}^2 k \int f_j^{(0)} \Phi_j^{(1)} \left[\frac{D_0 \Phi_{jQ}^{(1)}}{Dt} + (c_j - c_0) \cdot \frac{\partial \Phi_{jQ}}{\partial r} + \mathfrak{F}_j \cdot \frac{\partial \Phi_{jQ}}{\partial c_j} \right] dc_j \\ & - k \sum_{j=1}^2 \left[\int \Phi_{jQ}^{(1)} J_j (f_j^{(1)} f_i^{(1)}) dc_j + \int \Phi_{jQ}^{(1)} J_{ji} (f_j^{(1)} f_i^{(1)}) dc_j \right], \end{aligned} \quad (6)$$

wobei $s_Q^{(1)}$ die durch $\Phi_Q^{(1)}$ hervorgerufene zusätzliche spezifische Entropie, $\mathfrak{S}_Q^{(1)}$ den zusätzlichen Entropiestrom bedeutet.

$$s_Q^{(1)} = -\frac{k}{2\varrho} \sum_{j=1}^2 \int f_j^{(0)} \Phi_j^{(1)} \Phi_{jQ}^{(1)} dc_j,$$

$$\mathfrak{S}_Q^{(1)} = -\frac{k}{2} \sum_{j=1}^2 \int (c_j - c_0) f_j^{(0)} \Phi_j^{(1)} \Phi_{jQ}^{(1)} dc_j.$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{J}_D^{(2)} \cdot k \mathfrak{d}_{12}$ und $P^{(2)}/T : \partial c_0 / \partial r$ gehen aus (6) hervor, wenn in den Ausdrücken der rechten Gleichungsseite der Index Q jeweils durch D bzw. R ersetzt wird. Die Beziehung (6) bzw. ihre Analoga gestatten die Berechnung von $\mathfrak{J}_{Q\text{red}}^{(2)}$, $\mathfrak{J}_D^{(2)}$, $P^{(2)}$ bei Kenntnis der aus (1) bis (3) bestimmten Funktionen $\Phi_{jQ}^{(1)}$, $\Phi_{jD}^{(1)}$, $\Phi_{jR}^{(1)}$.

Die Formeln der Systeme mit mehr als zwei Komponenten sind komplizierter, aber im Prinzip von gleicher Bauart.

4. Die Funktionen $\Phi_{jQ}^{(1)}$, $\Phi_{jD}^{(1)}$, $\Phi_{jR}^{(1)}$ werden nach bekannten Methoden näherungsweise bestimmt³. Damit erhält man aus (6):

$$\begin{aligned} J_{Q\text{red}}^{(2)} = & \left\{ A \frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 + B \overset{\circ}{e} \right\} \frac{\partial \ln T}{\partial r} + C \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 \right) + D \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \overset{\circ}{e} \right) \\ & + \overset{\circ}{e} \cdot \left[E \mathfrak{d}_{12} + F \frac{\partial (n_1/n)}{\partial r} + G \left(\frac{\varrho_1}{\varrho} \mathfrak{F}_1 + \frac{\varrho_2}{\varrho} \mathfrak{F}_2 - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + H (\sqrt{m_1} \mathfrak{F}_1 - \sqrt{m_2} \mathfrak{F}_2) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J_D^{(2)} = & A' \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 \right) \mathfrak{d}_{12} + C' \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 \right) + D' \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot \overset{\circ}{e} \right) \\ & + \overset{\circ}{e} \cdot \left[F' \frac{\partial (n_1/n)}{\partial r} + I' \frac{\partial \ln T}{\partial r} + J' \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 \right) (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) + K' \frac{\partial}{\partial r} [c_0 (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2)] \right], \end{aligned} \quad (8)$$

³ S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, l. c. ¹, Kapitel 8, 9, 10.

$$\begin{aligned}
 P^{(2)} = & a \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot c_0 \right) e + b \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial c_0}{\partial r} + c \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_1}{\rho} \tilde{\gamma}_1 + \frac{q_2}{\rho} \tilde{\gamma}_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\
 & + f \frac{\partial \ln T}{\partial r} \frac{\partial \ln T}{\partial r} + g \frac{\partial \ln T}{\partial r} \tilde{\gamma}_{12} + h \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \ln T}{\partial r} + i \frac{\partial \tilde{\gamma}_{12}}{\partial r} + j \frac{\partial (n_1/n)}{\partial r} \frac{\partial \ln T}{\partial r} \\
 & + k \frac{\partial (n_1/n)}{\partial r} \tilde{\gamma}_{12} + l \left(\frac{q_1}{\rho} \tilde{\gamma}_1 + \frac{q_2}{\rho} F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \tilde{\gamma}_{12} + m \left(m_1^{1/2} \tilde{\gamma}_1 - m_2^{1/2} \tilde{\gamma}_2 \right) \tilde{\gamma}_{12}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

A, B etc. sind Funktionen der Temperatur, der Teilchendichte und des Molenbruches mit Koeffizienten, die von den reduzierten Massen, den molekularen Wechselwirkungskonstanten und den CHAPMAN-COWLINGSschen Stoßintegralen abhängen und leicht explizit angegeben werden können. Insbesondere findet man die Gleichheiten

$$D = h/T, \quad D' = i/kT, \quad (10)$$

⁴ M. KOHLER, Z. Phys. **127**, 215 [1949].

** Bei Nicht-MAXWELLSchen Molekülen treten in höherer Näherung in $s_Q^{(1)}$ und $s_D^{(1)}$ Mischglieder der Form $\mu (\partial \ln T / \partial r) \cdot \tilde{\gamma}_{12}$ auf. In $\mathfrak{E}_Q^{(1)}$ erhält man ein Glied mit $e \cdot \tilde{\gamma}_{12}$, in $\mathfrak{E}_D^{(1)}$ ein Glied mit $e \cdot (\partial \ln T / \partial r)$.

die Ausdruck der verallgemeinerten KOHLERSchen Symmetriebeziehungen⁴ sind.

5. Als Nebenergebnis erhält man die Ausdrücke ** für

$$\begin{aligned}
 s_Q^{(1)}, s_D^{(1)}, s_R^{(1)} & \quad \mathfrak{E}_Q^{(1)}, \mathfrak{E}_D^{(1)}, \mathfrak{E}_R^{(1)} \\
 s_Q^{(1)} &= \alpha \frac{\partial \ln T}{\partial r} \frac{\partial \ln T}{\partial r}, \quad s_D^{(1)} = \beta \tilde{\gamma}_{12} \tilde{\gamma}_{12}, \quad s_R^{(1)} = \gamma e : e; \\
 \mathfrak{E}_Q^{(1)} &= \delta e \frac{\partial \ln T}{\partial r}, \quad \mathfrak{E}_D^{(1)} = \varepsilon e \tilde{\gamma}_{12}, \quad \mathfrak{E}_R^{(1)} = \mathfrak{E}_Q^{(1)} + \mathfrak{E}_D^{(1)}.
 \end{aligned}$$

α, β etc. sind ebenfalls leicht angebbare Funktionen. Eine ausführliche Darstellung der Berechnungen und Diskussion der Ergebnisse wird demnächst erscheinen.

Natürliche Radioaktivität von Cer 142

Von W. RIEZLER und G. KAUF

Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität Bonn
(Z. Naturforsch. **12 a**, 665–666 [1957]; eingegangen am 8. Juni 1957)

Bei einer früheren Untersuchung¹ mit Hilfe von Kernplatten an natürlichen Isotopengemischen hatten wir bei Cer als untere Grenze für die Halbwertszeit einer etwaigen α -Aktivität $\alpha \cdot 4 \cdot 10^{16}$ Jahre gefunden, wobei α die Häufigkeit des aktiven Isotops bedeutet.

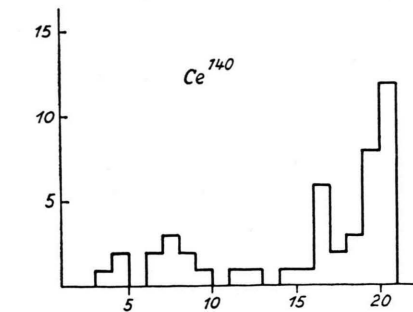


Abb. 1. Spureverteilung zu Ce^{140} (36 mg · d).

Wir haben nun die Versuche mit den getrennten Cer-Isotopen 140 und 142 wiederholt, die wir aus Harwell bezogen haben. Das erste Präparat enthielt 99,5% Ce^{140} und 0,5% Ce^{142} , das zweite 4% Ce^{140} und 96% Ce^{142} . Die Ergebnisse sind in den Abb. 1 und 2 dargestellt. Man sieht bei Ce^{142} eine sehr deutlich ausgeprägte

Spurengruppe mit einer mittleren Reichweite von $4,7 \mu$, dem entspricht eine Energie von 1,5 MeV. Das Produkt aus der in die durchmusterte Fläche eingebrachten

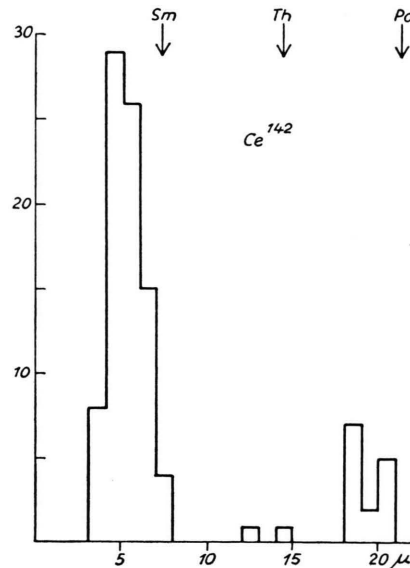


Abb. 2. Spureverteilung zu Ce^{142} (46 mg · d).

Ce^{142} -menge und der Lagerzeit war 46 mg · Tage; dabei wurden insgesamt 75 Spuren mit einer Reichweite um 5μ gezählt. Dies ergibt für Ce^{142} eine Zerfallskonstante von $1,47 \cdot 10^{-16}$ /Jahr und damit eine Halbwertszeit von $5,1 \cdot 10^{15}$ Jahren. Da Spuren mit einer Länge von 5μ

¹ W. PORSCHEN u. W. RIEZLER, Z. Naturforsch. **9 a**, 701 [1954].